Brèves communications - Kurze Mitteilungen
Brevi comunicazioni - Brief Reports

Les auteurs sont seuls responsables des opinions exprimées dans ces communications. – Für die kurzen Mitteilungen ist ausschließlich der Autor verantwortlich. – Per le brevi comunicazioni è responsabile solo l'autore. – The editors do not hold themselves responsible for the opinions expressed by their correspondents.

L'oscillateur harmonique à *n* dimensions

Nous considérons un corpuscule de masse m se déplaçant dans un espace à n dimensions sous l'action d'une force attractive, proportionnelle au rayon vecteur et qui tend à le ramener vers l'origine des coordonnées.

Si w représente la fréquence mécanique de la théorie classique, la fonction potentielle V s'écrivant

$$V = 2\pi^2 m w^2 \sum_i x_i^2 \quad (i = 1,2\ldots n) \tag{a}$$

l'équation de propagation a la forme

$$\Delta a + \frac{8\pi^2 m}{h^2} [E - 2\pi^2 m w^2 \sum_i x^2_i] a = 0. \tag{b}$$

Posons alors, avec M. LOUIS DE BROGLIE[1]

$$a(x_1, x_2, \ldots x_n) = \prod_i a_i(x_i) \tag{c}$$

l'équation (b) se décompose en n équations du type

$$\frac{d^2 a_i}{dx_i^2} + \frac{8\pi^2 m}{h^2} [E_i - 2\pi^2 m w^2 x^2_i] a_i = 0 \tag{d}$$

avec $E = \sum_i E_i$.

La notation $\lambda_i = \frac{2E_i}{hw}$ et le double changement de fonction et de variable

$$a_i(q_i) = e^{-\frac{q_i^2}{2}} \cdot H_{ki}(q_i); \quad x_i = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{mw}{h}\right)^{-1/2} \cdot q_i \tag{e}$$

transforme l'équation (d) en

$$\frac{d^2 H_{ki}}{dq_i^2} - 2q_i \frac{dH_{ki}}{dq_i} + (\lambda_i - 1) H_{ki} = 0 \tag{f}$$

où H_{ki} est le polynôme de HERMITE de degré k.

Il devient alors aisé de passer au premier ordre

$$\frac{d\tau_i}{dq_i} + \tau^2_i - 2q_i \tau_i + \lambda_i - 1 = 0; \tag{g}$$

tenant compte de la relation (c), nous avons

$$a = \exp.\left\{\sum_i \left(\int \tau_i \, dq_i - \tfrac{1}{2} q_i^2\right)\right\}$$

L'énergie E s'écrit

$$E = hw\left[\frac{n}{2} + \sum_i k_i\right]$$

ce qui montre que: pour un «oscillateur harmonique impair» (oscillateur à $2p+1$ dimensions), on obtient un énoncé de demi-quanta, alors que l'énoncé de quanta justifie «l'oscillateur harmonique pair» (oscillateur à $2p$ dimensions).

Nous pouvons associer à (g) la théorie, déjà classique, des développantes généralisées associées à une courbe plane. Nous trouvons une famille de courbes planes à paramétrisation isométrique dont la fonction d'arc a la valeur $\sigma'_i = \lambda_i - 1 = 2k_i$.

Il est intéressant de constater que les n solutions sont obtenues en donnant n valeurs à la constante k qui intervient dans $\lambda - 1 = 2k$.

Ainsi, on peut aborder une théorie oscillatoire, telle que celle de l'oscillateur harmonique à n dimensions, à partir de notions géométriques liées à une même équation de RICCATI, la variation des niveaux d'énergie correspondant à une famille de courbes-planes (dont les plus simples sont des cercles) à paramétrisation isométrique.

Enfin, à partir de cette «chaîne de figures planes», on peut, posant

$$\tau_i - q_i = \frac{1}{V_i} \cdot \frac{\partial V_i}{\partial q_i},$$

passer aux «chaînes d'équations de DARBOUX»[1] le passage d'une forme, soit géométrique (cas des courbes isométriques), soit algébrique (cas des chaînes de DARBOUX), à la suivante se faisant suivant une loi connue.

M. GABRIEL VIGUIER

Institut Henri Poincaré, Paris, le 30 novembre 1949.

Summary

We consider a particle having a mass m. It will be shown how it is possible to gain an oscillatory theory staring from classical metric notions connected with the same RICCATI equation. Then we find the "DARBOUX chain" of the problem.

[1] LOUIS DE BROGLIE, *Théorie de la quantification dans la nouvelle mécanique* (1932).

[1] G. VIGUIER, C.R. Acad. Sci. *224*, 14. 6. 48 No. 26.

Ein isoperimetrisches Problem mit Nebenbedingung

Durch Einführung von Nebenbedingungen wird das bekannte isoperimetrische Problem mit der Kugel als einziger Lösung in eigenartiger Weise modifiziert. So kann beispielsweise erzwungen werden, daß bei vorgegebener Oberfläche das absolute Minimum des Volumens nicht trivial ist und das Maximum des Volumens durch einen von der Kugel verschiedenen Körper geliefert wird. Aus diesem Grunde sowie wegen des Zusammenhangs mit einem ungelösten Problem der Theorie der konvexen Rotationskörper stelle ich folgendes Problem:

«*Gesucht sind die konvexen Rotationskörper von der festen Länge l, welche bei vorgegebenem Volumen V die größte Oberfläche F aufweisen*[1]».

[1] Vgl. hierzu die Dissertationen von G. HORMANN (Göttingen 1887) und W. HOWE (Berlin 1887). V und F dürfen ihre Rolle auch vertauschen.